



NETAMPRIŲ GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ PLIENINIŲ RĒMINIŲ KONSTRUKCIJŲ SKERSPJŪVIŲ OPTIMIZAVIMO ALGORITMAS

Romanas Karkauskas¹, Michail Popov²

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva
El. paštas: ¹rokark@st.vgtu.lt, ²michail.popov@st.vgtu.lt

Įteikta 2009 03 24; priimta 2009 04 17

Santrauka. Straipsnyje pateikiamas patobulintas plieninių rėmų kaip geometriškai netiesinių sistemų strypų skerspjūvių optimizacijos uždavinio matematinis modelis ir skaičiavimo algoritmas, įvertinantis medžiagos netampriąsias savybes bei eksploatacinius reikalavimus. Disipacinių savybių įvertinimas, naudojant netampriąsias plieno deformacijas, lemia reikšmingą laikomosios galios rezervo sumažinimą optimalios tamprios būklės konstrukcijos atžvilgiu. Eksploataciniai reikalavimai, keliami konstrukcijai jos naudojimo laikotarpiu, apima ne tik stiprumo, bet ir deformatyvumo, stabilumo ir konstrukcinius apribojimus. Jie apibrėžia minimalius skerspjūvių parametrus ir elementų ribinius liaunius. Visa tai riboja laisvą plastinių deformacijų plitimą, todėl optimali konstrukcija yra neyramoji tamprioji plastinė. Naudojami tampraus atsako dydžiai susieti netiesiniu funkciniu ryšiu su standartinių profilių skerspjūvių optimizuojamais parametrais, todėl uždavinys sprendžiamas iteracijų būdu. Pateikta nauja rėminio strypinio elemento tangentinės standumo matricos sudarymo metodika. Atliktas 16 aukštų rėmo iš standartinių profiliuotųjų skerspjūvių optimizacijos uždavinio skaitinis eksperimentas.

Reikšminiai žodžiai: optimizacija, tamprioji plastinė konstrukcija, geometrinis netiesiškumas, tangentinė standumo matrica, geometrinis standumas, plastiškoji irtis.

1. Įvadas

Pagrindinis konstrukcijos optimizacijos uždavinio tikslas – konstrukcijos projektas, tenkinantis ribinius saugos ir tinkamumo būvių reikalavimus nuo įvairių išorinių poveikių veikimo. Tai galima užtikrinti tik turint išsamią informaciją apie konstrukcijos elgseną visomis galimomis darbo sąlygomis ir bet kokių jos egzistavimo periodu. Savaimė aišku, kad tokia plačia prasme šis uždavinys negali būti išspręstas statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais, nes konstrukcijos forma ir matmenys esant atitinkamoms apkrovoms iš esmės keičiasi ir mažų poslinkių principas tampa nepatikimas. Be to, pradėdant nuo tam tikro įtempių būvio lygio, Huko dėsnis daugeliui medžiagų yra netinkamas ir keičiamas netiesiniu ryšiu. Vadinasi, reikia atsisakyti tiesinės teorijos prielaidų ir pereiti prie gerokai išsamesnių ir sudėtingesnių netiesinės teorijos apibendrinimų. Visų pirma, reikia atsisakyti skaičiavimo pagal ne-deformuotą būvį, kuris toleruoja mažus poslinkius. Antra,

reikia įvertinti konstrukcijos geometrijos pasikeitimo įtaką jos įtempių-deformacijų būviui (IDB). Trečia, pereiti prie netiesinio įtempių-deformacijų ryšio ir įvertinti atsirandančias plastines deformacijas, nes kai kurių medžiagų konstrukcijos dar iki plastiškosios irties įgauna labai didelius poslinkius ir gali neatitikti normalios eksploatacijos reikalavimų. Taigi šios minėtos priežastys turi būti įvertinamos sudarant konstrukcijų optimizacijos uždavinių matematinis modelius.

Pastaruosius tris dešimtmečius gana intensyviai buvo plėtojama konstrukcijų optimizacijos teorija, metodai ir skaičiavimo algoritmai bei jų integracija su šiuolaikinėmis kompiuterinio modeliavimo ir automatizuoto projektavimo sistemomis (Atkočiūnas *et al.* 2008; Chen *et al.* 1999; Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Hayalioglu 2000; Kalanta 1997; Karkauskas 1997, 2004, 2007; Karkauskas, Norkus 2006; Manickarajah *et al.* 2000; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2003; Levy, Lev 1987; Marlet, Arora 2004; Norkus, Karkauskas 2005). Pažymėtina, kad einamuoju metu pasiro-

dė darbų, kuriuose taikomi genetiniai algoritmai, pagrįsti biologinių principų įdiegimu į konstrukcijų optimizacijos problemų realizacijos kompiuterines technologijas (Hayalioglu 2000; Rajan, Nguyen 2004; Sarma, Adeli 2000). Patrauklusis šių algoritmų bruožas – jų suderinamumas su diskretine optimizacija, jie nereikalauja projektuotojų nemėgstamų funkcijų išvestinių, kurios labai plačiai taikomos klasikiniose optimizacijos metoduose.

Atliktų darbų analizė leidžia teigti, kad konstrukcijų optimizacijos metodika, kurioje vienu metu taikoma matematinio programavimo teorija, ekstreminiai energiniai principai ir medžiagos netampriosios savybės, yra viena iš efektyviausių (Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Kalanta 1997; Karkauskas 1997, 1998; Karkauskas, Norkus 2006; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2003; Norkus, Karkauskas 2005). Čia medžiagos plastiškųjų savybių įvertinimas daug tiksliau parodo konstrukcijos darbą įvairiais apkrovimo etapais ir leidžia sukurti gerokai racialesnį projektą (Atkočiūnas *et al.* 2008; Chen *et al.* 1999; Čyras *et al.* 2004; Kalanta 1997; Karkauskas 1997, 1998, 2004; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2003; Norkus, Karkauskas 2005; Saka, Kameshki 1998; Soh, Chan 2001; Zhang, Lu 1995). Verta pabrėžti, kad dauguma atliktų darbų pagrįsti ribinės pusiausvyros teorijos prielaidomis (Chen *et al.* 1999; Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Soh, Chan 2001; Zhang, Lu 1995). Dėl šios priežasties gauti optimalūs konstrukcijų projektai atitinka tik stiprumo kriterijus, tenkinančius saugos būvį. Būtina pažymėti, kad optimizacijos rezultatai pagal plastiškojo suirimo kriterijų ne visuomet yra lemiami, nes optimalios konstrukcijos ribinis tinkamumo būvis gali būti prarastas net ir nepasiekus plastiškos suirties dėl per didelių netampriųjų deformacijų ir poslinkių atsiradimo. Be to, optimizacijos uždavinio apribojimų sąlygos dažniausiai yra formuluojamos neatsižvelgiant į Statybos techninio reglamento STR 2.05.08:2005 (2005) reikalavimus ir dėl to optimalios konstrukcijos standumas neužtikrina normalaus jos funkcionavimo.

Šios priežastys riboja ribinės pusiausvyros teorijos praktinį taikymą rengiant optimalius konstrukcijų projektus. Todėl konstrukcijos deformuoto būvio parametrų įvertinimas būtinas optimizacijos uždavinių matematinuose modeliuose. Deformatyvumo apribojimai nusako rėmo mazgų ar atskirų dalių poslinkių ribas, konstrukciniai – minimalius skerspjūvių parametrus, strypų ribinius liaunius etc. Nėra abejonių, kad konstrukcijos optimizacija, įvertinant šiuos visus reikalavimus ir plieno netampriąsias savybes, yra vienas svarbiausių optimalaus projektavimo uždavinių.

Šių tyrinėjimų tikslas:

- Tolesnis konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematinio modelio skaičiavimo algoritmo, grindžiamo ekstremiais energetiniais princi-

pais (Čyras *et al.* 2004; Čyras 1983; Karkauskas 2007), tobulinimas.

- Tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumai, atsižvelgiant į vidinių jėgų sukeltus įvairius konstrukcijos elementų pokyčius.
- Optimizacijos uždavinių skaitinės realizacijos aspektų analizė.

Siūloma metodika yra iliustruojama 16 aukštų laisvojo plieninio rėmo, veikiamo vertikalių ir horizontalių jėgų, skaičiavimu. Strypų skerspjūvių plotų optimizacija atliekama turint omenyje funkcines priklausomybes tarp skerspjūvio parametrų, tinkančių dvitėjų standartinių profiliuotųjų sijoms.

2. Matematinis modelis

Rėminių konstrukcijų optimizacijos uždavinys yra formuluojamas taip: žinant rėmo konfigūraciją ir išorines jėgas, reikia rasti strypų skerspjūvių plotų A (ribinių įrašų S_0) pasiskirstymą, tenkinantį minimalaus tūrio konstrukcijos optimalumo kriterijų, kai atskiri konstrukcijos elementai patiria plastiškąsias deformacijas. Nagrinėjamo optimizacijos uždavinio kompleksiniai apribojimai turi apimti, visų pirma, sąlygas, apibūdinančias konstrukcijos tikrąjį ĮDB. Tokios sąlygos yra apibendrinto Lagranžo uždavinio priklausomybės. Antra, standumo sąlygos turi apimti poslinkių apribojimus tam tikrose konstrukcijos vietose tam tikromis kryptimis: $\mathbf{u}^- \leq (\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e) \leq \mathbf{u}^+$, čia \mathbf{u}^+ ir \mathbf{u}^- – poslinkių viršutinių ir apatinių ribų normatyvinės reikšmės. Be šių būtinų sąlygų, gali būti ir kitokio pobūdžio technologinių ar konstrukcinių apribojimų elementų stabilumui ar ribinių įrašų žemutinei kitimo ribai S_0^{\min} . Tai riboja laisvą konstrukcijos netampriųjų deformacijų plitimą, todėl optimalių skerspjūvių konstrukcijos elementuose atsiranda ir tampriosios, ir palstiškosios deformacijos, lemiamos liekamųjų įrašų S_r ir poslinkių \mathbf{u}_r . Jei šie apribojimai griežti, tai konstrukcija nepasiekia plastiškosios suirties.

Tokiu būdu suformuluoto optimizacijos uždavinio matematinis modelis yra užrašomas taip (Čyras *et al.* 2004; Karkauskas 2004):

$$\begin{aligned}
 &\text{Rasti} && \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0 \rightarrow \min, \\
 &\text{kai} && [\Gamma] \mathbf{S}_0 - [\Phi_c] \mathbf{S}_r \geq [\Phi_e] \mathbf{S}_e, \\
 &&& [A_n] \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \\
 &&& [D] \mathbf{S}_r + [\Phi_c]^T \boldsymbol{\lambda} - [A_n]^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \\
 &&& \boldsymbol{\lambda}^T ([\Gamma] \mathbf{S}_0 - [\Phi_c] (\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e)) = \mathbf{0}, \\
 &&& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \\
 &&& \mathbf{u}^- \leq (\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e) \leq \mathbf{u}^+, \\
 &&& \mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_0^{\min}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

čia: $[A_n] = [C]^T [\bar{A}_n]$ – konstrukcijos BEM diskretinio deformuoto modelio pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, kurios išraiška priklauso nuo nagrinėjamos konstrukcijos tipo ir kraštinių sąlygų, apibūdinamų tam tikra prasme matricoje $[C]$; $[\bar{A}_n]$ – fiktyvioji rėmo elementų pusiausvyros lygčių $[\bar{A}_n] \cdot \mathbf{S} = \bar{\mathbf{F}}$ matrica globalių koordinatų sistemoje, o vektorius $\bar{\mathbf{F}}$ yra sudarytas iš paskirų baigtinių elementų visų mazginių jėgų; $[\Phi_c]$ – rėmo takumo sąlygų matrica, priklausanti nuo atskirų elementų ribinių lenkimo momentų ir ribinių ašinių jėgų santykių-ekscentricitetų c .

Tai netiesinio matematinio programavimo daugiaekstremalis uždavinys, sprendžiamas iteraciniu būdu. Daugiaekstremiškumą sudaro Kuno-Takerio papildomumo sąlygos, t. y. sandauga $\lambda^T (\Gamma \mathbf{S}_0 - [\Phi_c](\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e)) = \mathbf{0}$. Ši aplinkybė komplikuoja uždavinio išsprendimą.

Siūlomas originalus konstrukcijų netiesinės optimizacijos algoritmas (realizuojant iteracines procedūras optimizacijos cikle), kuris leidžia apeiti minėtus sunkumus. Optimizacijos uždavinio ciklas apima tris pakopas.

3. Tampraus skaičiavimo netiesinė analizė

Tai konstrukcijos skerspjūvių optimizavimo ciklo pirmos pakopos uždavinys – konstrukcijos netiesinė analizė. Kai apkrautoje konstrukcijoje atsiranda didelių poslinkių, jos elgsena aprašoma netiesiškai. Deformacijų ir poslinkių priklausomybėje atsiranda netiesinių narių. Todėl norint nustatyti tampraus atsako įrašų vektorių $\mathbf{S}_e = [S_{e,1} \ S_{e,2} \ \dots \ S_{e,n}]^T$ ir mazginių poslinkių vektorių $\mathbf{u}_e = [u_{e,1} \ u_{e,2} \ \dots \ u_{e,m}]^T$, būtina spręsti tokią netiesinę lygtį:

$$[K_\tau] \mathbf{u}_e = \mathbf{F}, \quad (2)$$

čia: $[K_\tau] = [K_e] + [K_g] + [K_u]$ – visos konstrukcijos, globalioji standumo matrica; $[K_e]$ – mažų poslinkių standumo matrica; $[K_g]$ – geometrinė standumo matrica, įvertinanti konstrukcijos deformuoto būvio įtaką jos standumui; $[K_u]$ – pradinių poslinkių standumo matrica; n – konstrukcijos elementuose veikiančių vidinių jėgų skaičius; m – konstrukcijos globaliųjų poslinkių skaičius (DOF).

Pirmos pakopos uždavinys cikle yra sprendžiamas, esant duotiems skerspjūvių plotams A ir priklausomybėms tarp A ir ašinių inercijos momentų I .

3.1. Tangentinė standumo matrica

Baigtinių elementų metodo tangentinės standumo matricos sudarymui naudojame pilnutinės diskretizuoto kūno potencinės energijos Π stacionarumo sąlygą (Atkočiūnas, Nagevičius 2004; Barauskas *et al.* 2004), t. y. pirmąją funkcionalo Π variaciją, kuri yra lygi nuliui.

Tamprumo teorijos uždaviniuose pilnutinė potencinė energija Π susideda iš potencinės energijos (vidinių jėgų potencialo) U ir potencinės išorinių jėgų energijos (išorinių jėgų potencialo) Ω . Potencinę kūno deformavimo energiją nulemia paskirų baigtinių elementų potencinė deformavimo energija, t. y.:

$$U = \sum_{k=1}^s U_k, \quad (3)$$

čia: s – baigtinių elementų skaičius; U_k – įtempto ir deformuoto baigtinio elemento potencinė energija, išreiškiama taip:

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k \quad (4)$$

Tariame, kad išorinių jėgų potencialą lemia tik išorinių jėgų (tarpelementinių sąveikos jėgų \mathbf{F}_k) darbas, atliktas paskirų elementų mazginių taškų poslinkiuose, apibūdinamų vektoriumi \mathbf{u}'_k :

$$\Omega = \sum_{k=1}^s \Omega_k = - \sum_{k=1}^s \int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}_k dV_k. \quad (5)$$

Pilnutinė potencinė energija Π bus lygi vidinių ir išorinių jėgų darbui, atliktam gražinant deformuotą kūną į jo pirmykštį nedeformuotą būvį (bet nenukraunant, t. y. nepašalinant išorinių jėgų). Todėl išorinės jėgos atlieka neigiamą galimą darbą, t. y. išraiškoje (5) nėra daugiklio 1/2. Tokiu būdu diskretizuoto kūno elemento pilnutinė potencinė energija Π_k bus gauta susumavus paskirų baigtinių elementų vidinių ir išorinių jėgų potencialus (4) ir (5):

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k - \int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}_k dV_k. \quad (6)$$

Pasinaudojus pilnutinės potencinės energijos stacionarumo sąlygomis (Lagranžo variaciniu principu)

$$\delta \Pi_k = 0, \quad (7)$$

gaunamos baigtinio elemento pusiausvyros lygtys, parašytos mazginiais poslinkiais:

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \mathbf{u}'_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_k} \left(\frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k \right) - \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_k} \left(\int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}_k dV_k \right) = 0.$$

Ši lygtis yra baigtinio elemento pusiausvyros netiesinė lygtis, nes ir įtempių funkcija $\sigma_k(\mathbf{x})$ taip pat išreiškiama poslinkiais \mathbf{u}'_k . Bendruoju atveju šią lygtį galime užrašyti taip:

$$\Psi_k(\mathbf{u}'_k) - \mathbf{F}_k = 0, \tag{9}$$

čia: \mathbf{F}_k – elemento mazginių jėgų vektorius;

$$\Psi_k(\mathbf{u}'_k) = \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}'_k} \right\}^T \cdot \sigma_k(\mathbf{x}) dV_k. \tag{10}$$

Tai yra elemento vidinių jėgų vektorius, o jo išvestinė

$$\frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial \mathbf{u}'_k} = [k_\tau(\mathbf{u}'_k)] \tag{11}$$

yra vadinama baigtinio elemento **tangentine standumo matrica**.

Matome, kad elemento tangentinės standumo matricos fizinė prasmė yra elemento netiesinės pusiausvyros lygties (9) pirmojo nario Jakobio matrica, apskaičiuota esant žinomiems mazginiams poslinkiams \mathbf{u}'_k . Reikia pažymėti, kad kvadratinės matricos $[k_\tau(\mathbf{u}'_k)]$ matmuo priklauso nuo elemento mazginių poslinkių vektoriaus \mathbf{u}'_k ilgio. Jos eilutės narius gauname diferencijuodami (11) pagal vieną iš vektoriaus \mathbf{u}'_k komponentų:

$$[k_\tau(\mathbf{u}'_k)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_k(\mathbf{x})}{\partial u_1} \right\}^T \sigma_k dV_k \\ \frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_k(\mathbf{x})}{\partial u_2} \right\}^T \sigma_k dV_k \\ \frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_k(\mathbf{x})}{\partial u_3} \right\}^T \sigma_k dV_k \\ \dots \end{bmatrix} \tag{12}$$

Geometriniai netiesiškumai yra nulemti netiesinės poslinkių ir deformacijų priklausomybės. Vadinasi, šios matricos (12) reikšmė netiesiogiai priklauso nuo mazginių poslinkių \mathbf{u}'_k . Nuo jų priklauso deformacijų $\varepsilon_k(\mathbf{x})$ reikšmė, o nuo šios savo ruožtu priklauso įtempių $\sigma_k(\mathbf{x})$ reikšmė.

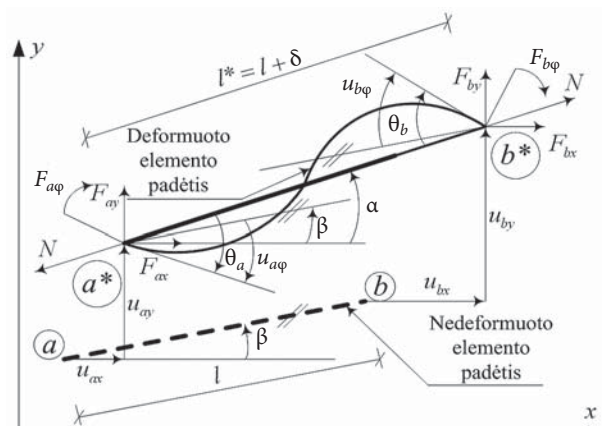
3.2. Rėmo strypinis elementas

Nagrinėjame rėminės konstrukcijos 2D elementą, pavaizduotą 1 pav. Deformuojant rėmą, šio elemento taškai gali pasislinkti atstumais, gerokai viršijančiais jo

matmenis. Teigiame, kad paties elemento forma nekinta. Elementas yra tempiamasis ar gniuždomasis ir lenkiamasis.

1 pav. parodyto elemento mazginių jėgų vektorius globalinėje koordinatinių sistemoje turi šiuos komponentus:

$$\mathbf{F}_k = [F_{ax} \ F_{ay} \ F_{a\varphi} \ F_{bx} \ F_{by} \ F_{b\varphi}]^T.$$



1 pav. Rėmo 2D elementas globaliojoje koordinatinių sistemoje

Fig. 1. 2D frame element in global coordinate system

Jam dualus yra elemento taškų poslinkių vektorius:

$$\mathbf{u}_k = [u_{k1} \ u_{ay} \ u_{a\varphi} \ u_{bx} \ u_{by} \ u_{b\varphi}]^T.$$

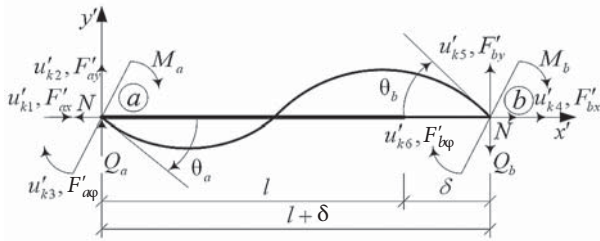
Atitinkami vektoriai lokaloje koordinatinių sistemoje bus \mathbf{F}'_k ir \mathbf{u}'_k , kurių komponentų teigiamos kryptys yra parodytos 2 pav. Ten pat parodytos teigiamų krypčių elemento lokalsios įrašos, kurių vektorius:

$$\mathbf{S}_{ab} = [M_a \ M_b \ N]^T.$$

Tempiamojo gniuždomojo bei kartu lenkiamojo elemento mazginių poslinkių vektorius lokaloje koordinatinių sistemoje bus parašomas elemento galų horizontaliais, vertikaliais ir kampiniais poslinkiais (2 pav.), kurių vektorius:

$$\mathbf{u}'_k = [u'_{k1} \ u'_{k2} \ u'_{k3} \ u'_{k4} \ u'_{k5} \ u'_{k6}]^T.$$

Rėminės konstrukcijos elementas lokaloje koordinatinių sistemoje $x'O'y'$ turi šešis laisvumo laipsnius. Tokio elemento bet kurio taško linijinis poslinkis x' ašies kryptimi (elemento pailgėjimas ar sutrumpėjimas) $u'_x(x)$ yra aprašomas tiesine funkcija, o linijinis poslinkis y' ašies kryptimi $u'_y(x)$ aprašomas netiesine funkcija. Šioms funkcijoms aproksimuoti daž-



2 pav. Elementas lokalojoje koordinatinių sistemoje

Fig. 2. Element in local coordinate system

niausiai naudojami Hermito daugianariai. Jų nežinant, bet kurio taško linijiniams poslinkiams interpoliuoti per elemento mazginius taškus Hermito daugianarius galima gauti interpoliacines funkcijas parenkant tam tikro daugianario pavidalu.

Taigi elemento bet kurio taško linijinių poslinkių vektorius $\mathbf{u}_k(x) = [u'_x(x) \ u'_y(x)]^T$ išreiškiamas elemento mazginiais poslinkiais ir užrašomas taip:

$$\mathbf{u}_k(x) = [N_k(x)] \cdot \mathbf{u}'_k \quad (13)$$

čia

$$[N_k(x)] = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

yra vadinama elemento formos funkcijų matrica, kurios nariai yra tokie Hermito daugianariai:

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}, \\ N_2(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_3(x) &= -x + \frac{2}{l}x^2 - \frac{1}{l^2}x^3, \\ N_4(x) &= \frac{x}{l}, \\ N_5(x) &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_6(x) &= \frac{1}{l}x^2 - \frac{1}{l^2}x^3. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3.2.1. Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais

Nagrinėjame palyginti didelių poslinkių atvejį, kai maksimalaus įlinkio ir skerspjūvio charakteringojo matmens (skerspjūvio aukščio h) santykis tenkina šias ribas: $1/5 \leq u_{\max}/h \leq 5$ Tuomet ryšys tarp deformacijų ir

poslinkių yra netiesinis. A. Čyro ir kt. monografijoje (Čyras *et al.* 2004) yra išvestos šio ryšio formulės bet kokios formos erdviniam elementui kreivalinijinėje ortogonaliojoje koordinatinių sistemoje. Jos susieja elemento vidurinio paviršiaus deformacijos su šio paviršiaus taškų poslinkiais. Jas galima naudoti ir rėminės konstrukcijos elementui tarus, kad kreivalinijinės koordinatės sutampa su stačiakampe Dekarto koordinatinių sistema, o jas lydinčios pirmos kvadratinės formos koeficientų funkcijos $A_1 = A_2 = 1$, kreivių spinduliai $R_1 = R_2 = \infty$. Tuomet strypo ašies išilginė deformacija:

$$\Delta_{11} = \frac{\partial u'_x(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_y(x)}{\partial x} \right)^2,$$

o kreivis

$$\kappa_{11} = \frac{\partial^2 u'_y(x)}{\partial x^2}.$$

Elemento skerspjūvio bet kurio taško suminė išilginė deformacija užrašoma taip (Čyras *et al.* 2004):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_k(x) &= \Delta_{11} + y \cdot \kappa_{11} = \\ &= \frac{\partial u'_x(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_y(x)}{\partial x} \right)^2 - y \cdot \frac{\partial^2 u'_y(x)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (15)$$

y – taško atstumas nuo strypo neutraliosios linijos.

Paprastumo dėlei nagrinėjamas strypinis elementas, kurio simetrinio skerspjūvio plotis b , aukštis h ir ilgis l . Tuomet jo vidinių jėgų vektorius (10) užrašomas taip:

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}'_k) = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} \right]^T \boldsymbol{\sigma}_k(x) dx dy. \quad (16)$$

Vidinių jėgų vektorius (16) dešiniąją pusę išreiškiame elemento mazginių taškų poslinkiais, įrašę į deformacijų išraišką (15) poslinkių aproksimacijos funkcijas (13). Gauname deformacijų funkciją, išreikštą mazginiais poslinkiais:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k(x) = [C_0] \cdot \mathbf{u}'_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k - y [C_2(x)] \cdot \mathbf{u}'_k, \quad (17)$$

čia $[C_0]$ ir $[C_2(x)]$, ir $[C_3(x)] = [C_1(x)]^T \cdot [C_1(x)]$ yra koeficientų matricos, gaunamos diferencijuojant elemento formos funkcijų matricos $[N_k(x)]$ atitinkamą eilutę:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_1(x)] = \begin{bmatrix} 0 - \frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} - 1 \\ + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \quad 0 \quad \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \quad \frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \end{bmatrix};$$

$$[C_2(x)] = \begin{bmatrix} 0 - \frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix}.$$

3.2.2. Elemento tangentinė standumo matrica

Įrašius (17) išraišką į (16), elemento vidinių jėgų vektorius yra išreiškiamas tokiu būdu:

$$\Psi_k(u) = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot \sigma_k(x) dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \sigma'_k(x) dx dy - b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y \cdot [C_2(x)]^T \cdot \sigma_k(x) dx dy. \quad (18)$$

Panaudojus gautą vidinių jėgų vektorių, tangentinė standumo matrica (11) yra tokia:

$$[k_\tau(u'_k)] = \frac{\partial \Psi_k(u'_k)}{\partial u'_k} = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial u'_k} dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma_k(x) dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot u'_k \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial u'_k} dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y \cdot [C_2(x)]^T \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial u'_k} dx dy. \quad (19)$$

Į Huko dėsnį $\sigma_k(x) = E \cdot \epsilon_k(x)$ įrašius deformacijų išraišką (17), gaunami įtempiai mazginiais poslinkiais:

$$\sigma_k(x) = E \cdot [C_0] \cdot u'_k + \frac{1}{2} \cdot E \cdot u'_k{}^T [C_3(x)] \cdot u'_k - y \cdot E \cdot [C_2(x)] \cdot u'_k, \quad (20)$$

E – medžiagos tamprumo modulis.

Skaiciuojama įtempių funkcijos (20) išvestinė:

$$\frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial u'_k} = E \left([C_0] + u'_k{}^T \cdot [C_3(x)] - y \cdot [C_2(x)] \right). \quad (21)$$

Įtempius (20) ir jų išvestinę (21) įrašius į (19) ir atlikus diferencijavimą, gaunama elemento tangentinė standumo matrica:

$$[k'_\tau] = [k'_e] + [k'_g] + [k'_u]. \quad (22)$$

čia:

$$[k'_e] = E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot [C_0] dx dy + E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y^2 \cdot [C_2(x)]^T \cdot [C_2(x)] dx dy \quad (23)$$

yra elemento **mažų poslinkių standumo matrica;**

$$[k'_g] = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma_k(x) dx dy \quad (24)$$

yra **geometrinė standumo matrica;**

$$[k'_u] = E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot u'_k \cdot [C_0] dx dy + E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot u'_k \cdot u'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx dy + E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot u'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx dy \quad (25)$$

yra **pradinių poslinkių standumo matrica.**

Į (24) įrašius (20) gaunama geometrinė standumo matrica, išreikšta mazginiais poslinkiais:

$$[k'_g] = E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot [C_0] \cdot u'_k dx dy + \frac{1}{2} \cdot E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot u'_k{}^T \cdot [C_3(x)] \cdot u'_k dx dy - E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot y \cdot [C_2(x)] dx dy. \quad (26)$$

Gautos išraiškos dešinioios pusės pirmasis narys sudaro pastoviąją geometrinės standumo matricos, kurią nulemia tempimo gniuždymo įtempiai, dalį. Antrasis – kintamą, apibrėžiančią lenkimo įtempių įtaką elemento

standumui, o trečiasis, atlikus algebrinius veiksmus, yra lygus nuliui. Tokiu būdu geometrinę standumo matricą galima užrašyti taip:

$$[k'_g] = [k'_{g\sigma_{cont}}] + [k'_{g\sigma_{var}}].$$

Transformacija iš lokaliųjų komponentų į globaliuosius yra atliekama įprastu būdu. Tam tikslui lokaliojoje koordinatinių sistemoje sudaroma elemento krypties kosinusų matrica $[T_{ab}]$ ir gaunama elemento tangentinė standumo matrica globaliojoje sistemoje

$$[k_\tau] = [T_{ab}]^T \cdot [k'_\tau] \cdot [T_{ab}]. \quad (27)$$

Tangentinės standumo matricos $[k_\tau]$ formuojamos kiekvienam elementui; jos vėliau sujungiamos ir gaunama visos sistemos tangentinė standumo matrica $[K_\tau]$. Ši matrica yra inkorporuojama į prieaugiais užrašytas pusiausvyros lygtis:

$$[K_\tau] \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}, \quad (28)$$

čia $\Delta \mathbf{F}$ ir $\Delta \mathbf{u}$ – m -mačiai visos konstrukcijos mazginės apkrovos prieaugių ir globaliųjų poslinkių prieaugių vektoriai.

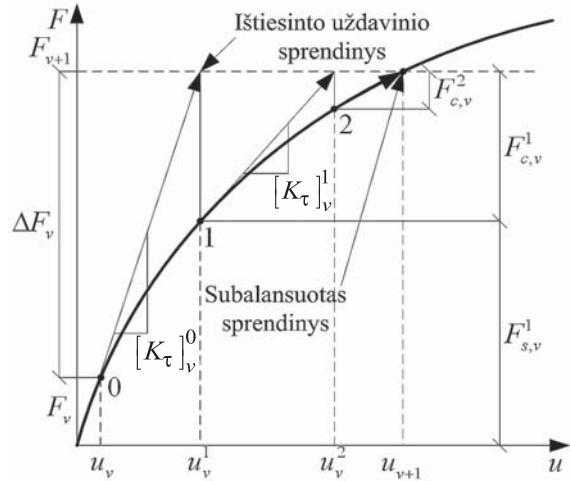
3.3. Tangentinio standumo metodo skaitmeninis realizacijos operacijos

Netiesinių lygčių sistemai (28) spręsti taikysime Newton-Raphson iteracinį apkrovos kontrolės metodą Belytscho ir Liu (2000), Zienkiewicz ir Taylor (2000), nes apkrovos-poslinkių kreivė yra iškiloji funkcija. Be to, verta pažymėti, kad konstrukcijos optimizacija atliekama nepasiekus visiško plastiškojo suirimo. Dėl šios priežasties tangentinė standumo matrica negali būti nulinė: $[K_\tau] \neq 0$. Taip pat skaitmeniniais eksperimentais nustatyta, kad Newton-Raphson metodu galutinis rezultatas pasiekiamas dviem ar trimis apkrovos žingsniais.

Aptarkime Newton-Raphson metodą, kurio principinė schema yra parodyta 3 pav. Ten pat yra parodyti konstrukcijos netiesinę elgseną charakterizuojantieji dydžiai. Taikant šį metodą, apkrovos vektorius \mathbf{F} skaidomas į dalis ir kiekvieno žingsnio metu didinamas tam tikru prieaugiu ΔF_v (3 pav.). Kiekvienu apkrovos prieaugio žingsniu v daromos iteracijos i siekiant eliminuoti nesubalansuotą jėgą $F_{c,v}^i$. Jos atsiranda dėl nesubalansuotų mazgo vidinių ir išorinių jėgų (3 pav.):

$$\mathbf{F}_{c,v}^i = \mathbf{F}_{v+1} - \mathbf{F}_{s,v}^i \quad (29)$$

čia: $\mathbf{F}_{c,v}^i$ – nesubalansuotų mazginių jėgų vektorius v -tojo žingsnio i -tosios iteracijos gale; \mathbf{F}_{v+1} – mazgo išorinių jėgų vektorius v -tojo žingsnio gale; $\mathbf{F}_{s,v}^i$ – mazginių vidinių jėgų vektorius v -tojo žingsnio i -tosios iteracijos gale.



3 pav. Newton-Raphson metodas

Fig. 3. Newton-Raphson method

Šios paklaidos atsiranda ištiesinant uždavinį, t. y. standumo matrica formuojama naudojant prieš tai buvusios iteracijos metu nustatytas mazgų poslinkių reikšmes.

Aptarsime vieno apkrovos prieaugio (žingsnio) iteracinio skaičiavimo metodiką.

Tariame, kad globaliųjų poslinkių vektorius \mathbf{u}_v ir apkrovos lygis \mathbf{F}_v nagrinėjamojo žingsnio v pradžioje yra žinomi. Tuomet v -tojo apkrovos žingsnio metu skaičiuojama vykdant tokias operacijas:

1. Nustatomas naujo apkrovos lygio vektorius

$$\mathbf{F}_{v+1} = \mathbf{F}_v + \Delta \mathbf{F},$$

čia $\Delta \mathbf{F}$ yra apkrovos prieaugių vektorius;

2. Suformuojama v apkrovimo žingsnio i -tosios iteracijos konstrukcijos tangentinė standumo matrica $[K_\tau]_v^i$ (iš paskirų elementų tangentių standumo matricų (27)) ir nustatomas jos determinantas. Jeigu determinantas yra neigiamas, konstatuojama, kad konstrukcija yra geometriškai judri, ir baigiama skaičiuoti. Jeigu determinantas yra teigiamas, sudaromos prieauginės pusiausvyros lygtys (28) nesubalansuotoms mazginėms jėgoms $\mathbf{F}_{c,v}^i$ skaičiuoti (pažymima, kad pirmajai iteracijai $\mathbf{F}_{c,v}^{i=1} = \Delta \mathbf{F}$):

$$[K_\tau]_v^i \Delta \mathbf{u}_v^i = \mathbf{F}_{c,v}^i. \quad (30)$$

3. Sprendžiama sudaryta tiesinių lygčių sistema ir gaunamas vykdomojo v žingsnio i -tosios iteracijos globaliųjų poslinkių prieaugių vektorius:

$$\Delta \mathbf{u}_v^i = ([K_\tau]_v^i)^{-1} \mathbf{F}_{c,v}^i. \quad (31)$$

4. Skaičiuojami nauji globalieji mazgų poslinkiai. Tam tikslui prie nuo nesubalansuotų mazginių jėgų gau-

tųjų poslinkių prieaugių (31) pridedamos ankstesnėje iteracijoje gautosios globaliosios poslinkių reikšmės:

$$\mathbf{u}_v^i = \Delta \mathbf{u}_v^i + \mathbf{u}_v^{i-1}. \quad (32)$$

5. Skaičiuojamos naujos mazgų koordinatės pagal tokią formulę:

$$\mathbf{x}_v^i = \mathbf{x}_v^{i-1} + \mathbf{u}_v^i. \quad (33)$$

Toliau skaičiuojami nauji elementų ašies pasvirimo kryptų kosinusai, sudaromos elementų koordinatų transformavimo matricos $[T_{ab}]_v^i$ ir fiktyvioji pusiausvyros lygčių matrica $[\bar{A}]_v^i$ iš paskirų baigtinių elementų pusiausvyros lygčių matricių $[A'_{ab}]_v^i$. Tam tikslui užrašomos elemento, parodyto 2 pav., apkrovos prieaugio ν -tojo žingsnio i -tosios iteracijos pusiausvyros lygtys tarp elemento galų ir lokaliųjų mazginių jėgų:

$$[A'_{ab}]_v^i \cdot \mathbf{S}_{ab} = \mathbf{F}'_k,$$

čia pusiausvyros lygčių koeficientų matrica yra tokia:

$$[A'_{ab}]_v^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{l+\delta} & -\frac{1}{l+\delta} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{l+\delta} & \frac{1}{l+\delta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Nustatomi elementų vidinių jėgų prieaugių dydžiai ir sudaromi elemento globaliųjų vidinių jėgų prieaugių vektoriai:

$$\Delta \mathbf{S}_{ab}^i = [k]_v^i ([A_{ab}]_v^i)^T [T_{ab}]_v^i \Delta \mathbf{u}_{ab,v}^i \quad (34)$$

su ν -tojo žingsnio i -tosios iteracijos elemento įrašų ir deformacijų fizinių lygčių matrica:

$$[k]_v^i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l+\delta} & \frac{2EI}{l+\delta} & 0 \\ \frac{2EI}{l+\delta} & \frac{4EI}{l+\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l+\delta} \end{bmatrix}$$

Sudaromas globaliųjų vidinių jėgų prieaugių vektorius:

$$\Delta \mathbf{S}_v^i = [\Delta \mathbf{S}_{1,v}^i \quad \Delta \mathbf{S}_{2,v}^i \quad \dots \quad \Delta \mathbf{S}_{ab,v}^i \quad \dots \quad \Delta \mathbf{S}_{s,v}^i]^T.$$

7. Skaičiuojami konstrukcijos elementų vidinių mazginių jėgų prieaugiai: $\Delta \bar{\mathbf{F}}_{s,v}^i = [\bar{A}]_v^i \Delta \mathbf{S}_v^i$.

8. Nustatomas globalusis mazginių jėgų prieaugių vektorius

$$\Delta \mathbf{F}_{s,v}^i = [C]^T \Delta \bar{\mathbf{F}}_{s,v}^i. \quad (35)$$

9. Skaičiuojamos ν apkrovos prieaugio žingsnio i -tosios iteracijos pabaigos suminės elementų mazginės jėgos ir įrašos:

$$\mathbf{F}_{s,v}^i = \mathbf{F}_{s,v}^{i-1} + \Delta \mathbf{F}_{s,v}^i \quad (36)$$

$$\mathbf{S}_v^i = \mathbf{S}_v^{i-1} + \Delta \mathbf{S}_v^i \quad (37)$$

10. Skaičiuojamos nesubalansuotos (kompensacinės) mazginės jėgos (29).

11. Tikrinama pasirinkto tikslumo konvergencijos sąlyga:

$$\mathbf{F}_{c,v}^i - \mathbf{F}_{c,v}^{i-1} \leq \text{eps?}$$

Jei ši sąlyga netenkinama, toliau vykdome žingsninį skaičiavimą, t. y. kartojame skaičiavimus, aprašytus 1–10 operacijose.

Iteracinis ciklas baigiamas, kai nesubalansuotų jėgų vektorius $\mathbf{F}_{c,v}$ yra labai mažas arba kai tenkinamas pasirinktas tikslumas $\mathbf{F}_{c,v}^i - \mathbf{F}_{c,v}^{i-1} \leq \text{eps?}$ Paskui gauname konstrukcijos deformuoto būvio visus reikalingus parametrus ir pusiausvyros lygčių koeficientų matricę $[A_n] = [C][\bar{A}]_v$, atitinkančią tam tikrą apkrovos lygį \mathbf{F} .

4. Tamprioji plastinė netiesinė analizė

Tai antroji optimizacijos ciklo pakopa, kurioje, taikant papildomos energijos ekstremumo principą, sprendžiamas tampriosios plastinės netiesinės analizės uždavinys. Šis uždavinys, įvertinant plastines deformacijas, realizuojamas pagal šį matematinį modelį (Čyras *et al.* 2004):

$$\text{Rasti } \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T [D] \mathbf{S}_r \rightarrow \min,$$

$$\text{kai } [\Phi] \mathbf{S}_r \leq \mathbf{S}_0 - [\Phi] \mathbf{S}_e,$$

$$[A_n] \mathbf{S}_r = \mathbf{0} \quad (38)$$

ir gaunamos eilinio optimizacijos ciklo tikrosios įrašos $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e$ ir poslinkiai $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e$.

5. Konstrukcijos skerspjuvių optimizacijos uždavinys

Trečioji pakopa – tai konstrukcijos skerspjuvių optimizacijos uždavinys, kuriame naujiems optimaliems projektuojamiems parametrams nustatyti naudojame netiesinės analizės [DB, dydžius \mathbf{S} ir \mathbf{u} .

Skaičiuojant optimizacijos uždavinį būtina žinoti funkcinę ryšį tarp tampraus atsako dydžių ir optimizuo-

jamų skerspjūvio parametrų, nuo kurių priklauso ribinių įrašų dydžiai, pavyzdžiui, ribinio lenkimo momento $M_0 = \sigma_y W_{pl}$ reikšmė. Taigi jų jungiamasis ryšys turi rodyti funkcinį ryšį su skerspjūvio plotu A . Standartinių dvitėjų atveju šis ryšys reikiamai tiksliai aproksimuojamas laipsninėmis funkcijomis: $I = a_1 A^{b_1}$, $W_{pl} = a_3 A^{b_3}$.

Tiesiogiai naudojamos gautos funkcijos duos labai sudėtingus reiškinius. Analogiška situacija bus taip pat gauta formuojant takumo sąlygų matricą $[\Phi_c]$. Pavyzdžiui, standartinių plieninių dvitėjo profilio sijų skaičiuojamojo j -tojo pjūvio takumo sąlygos yra tokios:

$$\left. \begin{aligned} M_{0j} - |M_j| &\geq 0, \\ M_{0j} - |M_j| / 1,18 - c_j^+ N_j &\geq 0, \\ M_{0j} + |M_j| / 1,18 + c_j^- N_j &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Šiomis takumo sąlygomis ekscentricitetai (ribinių lenkimo momentų ir ribinių ašinių jėgų santykiai), esant tempimo ašinei jėgai c^+ ir gniuždymo ašinei jėgai c^- , yra nežinomi. Jų ryšys su skerspjūviu plotu: $c_j^+ = M_{0,j} / N_{0,j}$, $c_j^- = M_{0,j} / N_{cr,j}$.

Konstruktinio reikalavimo ribinės įrašos apatinė riba $S_{0,cr}^{\min}$ yra susiejama su ribinio lenkimo momento minimaliaja reikšme $M_{0,cr}^{\min}$. Ją galima gauti naudojant klupdomųjų strypų ribinio liaunio λ_{rib} reikalavimus EC3 (1990), STR 2.05.08:2005 (2005). Gauname, kad

$$M_{0,cr}^{\min} = \sigma_y a_3 \left(\frac{l_b^2}{a_1 \lambda_{rib}^2} \right)^{\frac{b_3}{b_1-1}}. \quad (39)$$

Čia būtina žinoti priklausomybes tarp konstrukcijos atskirų elementų ribinių įrašų ir skerspjūvio plotų pasiskirstymo. Standartinių profilių atveju jis imamas taip: $M_0 = \sigma_y a_3 A^{b_3}$, $N_0 = \sigma_y A$, $N_{cr} = \sigma_{cr} A$, čia a_3 ir b_3 yra koeficientai, susieti su profilio tipu.

Konstrukcijos optimalumą eiliniame iteracinio proceso cikle apibūdina jos strypų suminis minimalus tūris. Taigi, įvertinus pirmiau pateiktas pastabas, trečiosios pakopos optimizacijos uždavinys yra toks:

$$\begin{aligned} \text{Rasti} \quad V &= \sum_{k=1}^{n_0} A_k \sum_{r=1}^{n_k} l_r \rightarrow \min, \\ \text{kai} \quad A_{k,j} &\geq \left((|M_j| / 1,18 + c_j^+ |N_j|) / \sigma_y a_3 \right)^{1/b_3}, \\ A_{k,j} &\geq \left((|M_j| / 1,18 + c_j^- |N_j|) / \sigma_y a_3 \right)^{1/b_3}, \\ A_{k,j} &\geq (|M_j| / \sigma_y a_3)^{1/b_3}, \\ u_t^- &\leq u_t \leq u_t^+, \quad A_k \geq A_k^{\min}, \\ t &= 1, 2, \dots, m_t, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (40)$$

Rėmo mazgo ar atskiros dalies ribojamas poslinkis yra išreiškiamas tokiu būdu:

$$u_t = \sum_{k=1}^s \mathbf{u}_{t,k} \left[\tilde{k}_{\tau,k} \right] \bar{\mathbf{u}}_{t,k}, \quad (41)$$

čia $\mathbf{u}_{t,k}$ – netiesinės tampriosios plastinės analizės nuo duotos išorinės apkrovos elemento mazginių taškų poslinkių t -ąja kryptimi vektoriai, gauti išsprendus remiantis (38) modeliu sudarytą dualią kvadratinio programavimo uždavinį porą; $[\tilde{k}_{\tau,k}]$ elemento tangentinė standumo matrica, jungianti ieškomus skerspjūvių plotus A_k . Iš jų sudarytos konstrukcijos globalinės standumo matricos $[K_{\tau}]$ determinantas turi būti didesnis už nulį, taip užtikrinamas konstrukcijos stabilumas. $\bar{\mathbf{u}}_{t,k}$ – elemento globalių poslinkių vektorius, apskaičiuotas nuo vienietinės jėgos, pridėtos ribojamo poslinkio kryptimi, įvertinus analizės metu nustatytą plastinių deformacijų būvį. Optimizacijos uždavinys (38) yra netiesinio iškiliojo matematinio programavimo uždavinys, turintis vienintelį ekstremumą (Karkauskas 2004).

6. Skaitinis eksperimentas

Išplėto optimizacijos uždavinio skaičiavimo algoritmo galimybes atskleisime optimizuodami vienos angos šešiolikos aukštų laisvąjį metalinį rėmą, pateiktą 4 pav., a. Ten pat pateikta rėmo geometrija, išorinės apkrovos pridėjimo vietos ir dydžiai. Konstrukciją sudaro 32 kolonos ir 16 sijų. Rėmas projektuojamas su vienodo dydžio ribiniais lenkimo momentais M_0 tam tikroms strypų grupėms. Pirmųjų šešių aukštų kolonų ribiniai lenkimo momentai yra M_{01} , kitų penkių aukštų – M_{02} ir paskutinių – M_{03} . Rėmsijės yra dviejų tipų – pirmųjų aštuonių aukštų ribiniai lenkimo momentai yra M_{04} , o likusiųjų – M_{05} . Šis pasiskirstymas konstrukcijos strypuose pateiktas 4 pav., a. Šešiolikos aukštų rėmo strypų optimizacija atliekama ribojant poslinkius taip: visų mazgų horizontaliųjų poslinkių reikšmė yra 30 cm, o rėmsijų įlinkių ribinė reikšmė – 6 cm. Rėmo strypai yra iš karštai valcuotų profiliuotųjų, kurių skerspjūviai kolonomis atitinka HEB Europos standartą, o rėmsijėms – IPE standartą. Jų skerspjūvių geometrinių charakteristikų pradiniais duomenimis modeliuoti taikome 1 lentelėje pateiktas koeficientų reikšmes. Plieno takumo riba $\sigma_y = 235$ MPa, tamprumo modulis $E = 206$ GPa, medžiagos tankis $\rho = 7850$ kg/m³. Rėmo geometriškai netiesinė elgsena yra įvertinama.

1 lentelė. Santykių koeficientai

Table 1. Coefficients of relations

Profiliuotis	a1	b1	a3	b3
IPE	0,7885	2,3210	0,8411	1,6572
HEB	0,2639	2,2917	0,4933	1,6467

Sudarytas rėmo diskretinis modelis parodytas 4 pav., b. Jame yra 50 mazgų (sijos yra skaidomos į du elementus), kurių laisvumo laipsnis yra 112, nes kiekvieno elemento gale veikia lenkimo momentas, o kolonos elemente dar ir pastovaus dydžio ašinė jėga. Taigi turime 32 koloninius elementus ir 32 sijinius elementus, iš viso 160 vidinių jėgų.

Konstrukcijos optimizacijos uždavinio (38) eksploataciniai apribojimai sudaromi, ėmus visoms kolonomis vienodą ribinį liaunį $\lambda \leq \lambda_{rib} = 120$. Kolonų klupdomasis ilgis l_b skaičiuojamas pagal STR 2.05.08:2005 (2005) pateiktas rekomendacijas. Galimos ribinių lenkimo momentų kitimo apatinės ribos kiekvieno optimizacijos ciklo metu yra identifikuojamos pagal (37) formulę. Jokie konstrukciniai reikalavimai sijų minimaliam ribiniam liauniui netaikomi.

Rėmo minimalaus tūrio optimizacijos uždavinio (38) skaičiavimų rezultatų dinamika pateikta 2 lentelėje. Pirmoje lentelės eilutėje (apžymėtoje kaip 0 iteracija) nurodytos rėmo elementų skerspjūvių plotų reikšmės, nustatytos skaičiavimų pradžioje. Optimalus konstrukcijos projektas, atitinkantis nustatytą tikslumą, pasiektas po 8 optimizacijos ciklų. Jis užrašytas 2 lentelės 10 eilutėje. Didžiausias poslinkis yra rėmo 16 aukšto mazgų poslinkis horizontaliąja kryptimi $u_{h,max} = 29,9960$ cm. Konstrukcijoje atsiveria trys plastiniai lankstai, jų susidarymo vietos pateiktos 4 pav., b. Konstrukcijos minimalus tūris – 3 641 780 cm³.

Optimalus to paties rėmo projektas, padidinus didžiausio visų mazgų horizontalus rėmo poslinkio ribą iki 40 cm, atitinkantis nustatytą tikslumą, pasiektas po 12 optimizacijos ciklų. Optimizacijos rezultatas pateiktas 2 lentelės priešpaskutinėje eilutėje. Šiuo atveju didžiausias horizontalus poslinkis yra $u_{h,max} = 29,9960$ cm. Konstrukcijoje atsiveria 10 plastinių lankstų. Jų atsivėrimo vietos yra 33, 35, 45, 46, 56, 76, 80, 100, 104 ir 108 konstrukcijos pjūviai.

Minimalus konstrukcijos tūris yra 3 325 930 cm³. Tai yra 8,7 % mažiau už konstrukcijos tūrio reikšmę, gautą, kai horizontalūs poslinkiai ribojami 30 cm dydžiu.

Optimizuojant ta patį rėmą, kai poslinkiai neribojami (skaičiuojama, kai konstrukcija yra būsenos, artimos plastiniam suirimui), rezultatai (Karkauskas 2007) pateikti paskutinėje 2 lentelės eilutėje. Šiuo atveju minimalus konstrukcijos tūris yra 2 931 310 cm³, o tai yra 19,5 % mažiau už rezultatą, kai horizontalūs poslinkiai ribojami 30 cm dydžiu. Maksimalus poslinkis yra rėmo 16 aukšto mazgų poslinkis horizontaliąja kryptimi. Jis kinta nuo 34,05 cm (1-ojo plastiško lanksto susidarymo metu) iki 107,46 cm (35-ojo lanksto susidarymo metu).

7. Išvados

1. Išplėtotas plieninių rėminių konstrukcijų skerspjūvių optimizacijos uždavinio matematinis modelis, įvertinant ir plieno netampriąsias deformacijas ir eksploatacinius reikalavimus, jungiančius stiprumo, deformatyvumo, stabilumo ir konstrukcinius apribojimus.
2. Sudarytas originalus strypų skerspjūvių parametru optimizacijos algoritmas, grindžiamas geometriškai netiesinių sistemų tampriu skaičiavimu, kurį veikia optimizuojami konstrukcijos parametrai. Todėl uždavinys turi būti sprendžiamas iteracijų būdu, perskaičiuojant tampraus atsako dydžius pagal gautus konstrukcijos optimizavimo rezultatus. Sudaryto algoritmo principai gali būti sėkmingai pritaikyti ir kitokio tipo konstrukcijų optimizacijos uždaviniams realizuoti.
3. Aptarti optimizacijos ciklo iteracijų proceso skaitmeninės realizacijos ypatumai.
4. Pasiūlyti plieninių standartinių profiliuotųjų sijų takumo sąlygų sudarymo, įvertinančio strypų stabilumo reikalavimus, principai.

2 lentelė. 16 aukštų rėmo optimalaus tūrio sprendimo kitimas iteracijų metu

Table 2. The optimum volume of 16-storey steel frame solution convergence per iterations

Iteracija	A ₁ (cm ²)	A ₂ (cm ²)	A ₃ (cm ²)	A ₄ (cm ²)	A ₅ (cm ²)	V (cm ³)
0	191,8344	191,8344	191,8344	191,8344	191,8344	4 788 190
1	171,8487	171,8487	171,8487	171,8487	171,8487	4 289 340
2	216,2892	157,2174	100,5890	171,8975	110,6591	3 741 670
...
7	230,0721	151,0244	84,7730	157,5741	113,6443	3 641 990
8	230,0721	151,0244	84,7545	157,5600	113,6379	3 641 780
$u_h \leq 40$ cm	228,2731	150,8525	87,8008	134,4597	92,5416	3 325 930
Karkauskas 2007	216,0175	136,8860	68,1718	122,5441	73,4384	2 931 310

5. Išplėtoto algoritmo efektyvumas iliustruojamas skaičiuojant 16 aukštų plieninio rėmo strypų skerspjūvių optimalius dydžius, tenkinančius minimalaus tūrio reikalavimus, kai horizontalūs poslinkiai yra apriboti.

Literatūra

- Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskus, A. 2008. Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints, *Computers & structures* 86(17–18): 1757–1768.
- Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai* [Theory of Elasticity]. Vilnius: Technika. 528 p.
- Barauskas, R.; Belevičius, R.; Kačianauskas, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. [Basis of finite elements method]. Vilnius: Technika. 612 p.
- Belytscho, T.; Liu, W. 2000. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons Ltd. 300 p.
- Chen, H. F.; Liu, Y. H.; Cen, Z. Z.; Xu, B. Y. 1999. On the Solution of Limit Load and Reference Stress of 3-D Structures under Multi-Loading Systems, *Engng. Struct.* 21: 530–537.
- Čyras, A. A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. Chichester: Ellis Horwood Lim. 121 p.
- Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems*. Vilnius: Technika. 354 p.
- EC3. *Eurocode No 3* Design of Steel Structures*, Vol 1, Nov 1990; Vol 2, July 1990.
- Hayalioglu, M. S. 2000. Optimum design of geometrically nonlinear elastic-plastic steel frames via genetic algorithm, *Computers & Structures* 77: 527–538.
- Kalanta, S. 1997. New formulations of optimization problems of elasto-plastic bar structures under displacements constraints, *Mechanika* 4(11): 11–16.
- Karkauskas, R. 1997. Analysis of non-holonomic behaviour of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures, *Mechanika* 4(11): 24–30.
- Karkauskas, R. 1998. Tampriai plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų analizė, *Statyba* [Civil Engineering] 4(4): 36–42.
- Karkauskas, R. 2004. Optimization of Elastic-Plastic Geometrically Nonlinear Light-Weight Structures under Stiffness and Stability Constraints, *Journal of Civil Engineering and Management* 10(2): 97–106.
- Karkauskas, R. 2007. Optimisation of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse, *Journal of civil engineering and management: international research and achievements* 13(3): 183–192.
- Karkauskas, R.; Norkus, A. 2006. Truss optimization under stiffness, stability constraints and random loading, *Mechanics Research Communications* 33: 177–189.
- Levy, R.; Lev, O. 1987. Recent developments in structural optimization, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 112: 1939–1962.
- Manickarajah, D.; Xie, Y. M.; Steven, G. P. 2000. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method. *Computers & Structures* 74: 731–741.
- Marlet, R. T.; Arora, J. S. 2004. Survey of multi-objective methods for engineering, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26: 369–395.
- Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2003. Incremental Method for Unloading Phenomenon Fixation at Shakedown, *Journal of Civil Engineering and Management* 9(3): 178–191.
- Norkus, A.; Karkauskas, R. 2005. On direct and stepped optimization problems of flexural steel frame and their numerical realization considering strength and stiffness conditions, *Mechanika* 5(5): 41–50.
- Rajan, S. D.; Nguyen, D. T. 2004. Design optimization of discrete structural systems using MPI-enabled genetic algorithm, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 28: 340–348.
- Saka, M.; Kameshki, E. 1998. Optimum design of unbraced rigid frames, *Computers & Structures* 69: 433–442.
- Sarma, K. C.; Adeli, H. 2000. Fuzzy genetic algorithm for optimization of steel structures, *Journal of Structural Engineering* 126: 596–604.
- Soh, C. K.; Chan, T. K. 2001. Numerical Method for Lower-Bound Solution of the Rigid-Plastic Limit Analysis Problem, *Journal of Engineering Mechanics* 127(11): 1075–1081.
- STR 2.05.08:2005. *Plieninių konstrukcijų projektavimas* [Design of Steel Structures]. Vilnius. 2005.
- Zhang, Y. G.; Lu, M. W. 1995. An Algorithm for Plastic Limit Analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 126: 333–341.
- Zienkiewicz, O.; Taylor, R. 2000. *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann. 5th edition. Vol 1: The Basis, 689 p.; Vol 2: Solid Mechanics, 459 p.; Fluid Dynamics, 334 p.

THE ALGORITHM OF THE CROSS-SECTION OPTIMIZATION OF INELASTIC GEOMETRICAL NONLINEAR STEEL FRAME STRUCTURES

R. Karkauskas, M. Popov

Summary. The purpose of the problem of optimization is introducing a project on the structure satisfying the limit requirements of the safety and usability conditions of the various effects of external actions. It can be provided by disposing comprehensive information about the real behaviour of construction under all working conditions and at any period of occurrence. Such problem cannot be solved applying the methods of the linear theory of structural mechanics because the form and dimensions of construction under assorted loads essentially change and the principle of small displacement becomes

unreliable. In addition, starting from certain stress conditions, Hook's law for majority materials is ineligible and changing by nonlinear relation. It is necessary to refuse the linear theory assumptions and change over to considerably wide and complex nonlinear theory generalizations. Abandoning calculation by unstrained condition tolerating small displacements allow changes in the influence of construction geometry on its deflected mode, proceed to nonlinear tensions and relations with deformations and allow incipient plastic deformations because some materials of construction close to plastic collapse receive very large displacements and do not satisfy requirements for successful exploitation. Thereby, the above mentioned causes must be allowed developing the mathematical models of solving the problems of construction optimization. A developed mathematical model and calculation algorithm with material inelastic properties as well as the evaluation of maintenance requirements are presented for the cross-sections optimization of geometrically nonlinear frames. The evaluation of dissipative features when employing inelastic steel stains results in a significant reduction of reserve in carrying capacity in respect of the optimal elastic state of the structure. Maintenance requirements for the structure introduced to its operation time involve not only strength constraints but also stiffness, stability and structural constraints defining minimal cross-section parameters and the ration of element slenderness. The aforementioned factors limit the free development of plastic stains, and therefore the optimal structure is considered in the state prior to plastic collapse. The used elastic response values are related to the optimal parameters of standard profile cross-sections by nonlinear functional relation. Therefore, this problem has to be solved using the iterative method. The procedure of forming a new beam element tangent stiffness matrix considered by internal forces stimulated by different element alterations is presented. The efficiency of the developed algorithm exemplified by calculating the optimal values of the cross-section involving 16-stroyed steel frame beam elements is obeyed by minimum volume requirements when node horizontal displacements are limited.

Keywords: optimization, elastic plastic structure, geometrical nonlinearity, tangent stiffness matrix, geometrical stiffness, plastic collapse

Romanas KARKAUSKAS. Prof. Dr. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University. The author and co-author of 2 monographs, 2 manuals and over 90 research articles. Research interests: elastic-plastic analysis and optimisation of structures, including physical and geometrical nonlinearities, numerical methods in structural mechanics. Lithuanian State Research Prize Laureate (1993).

Michail POPOV. PhD student. Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas Technical University. Research interests: elastic-plastic analysis and optimisation of structures, including physical and geometrical nonlinearities, numerical methods in structural mechanics.