



## TEMPIAMŪJŲ GELŽBETONINIŲ ELEMENTŲ PLEIŠĖJIMO IR DEFORMACIJŲ MODELIAVIMAS ĮTEMPIŲ PERDAVIMO ALGORITMU

Ronaldas JAKUBOVSKIS<sup>1</sup>, Mantas JUKNYS<sup>2</sup>, Pui-Lam NG<sup>3</sup>

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Vilnius, Lietuva*  
*El. paštas: <sup>1</sup>ronaldas.jakubovskis@vgtu.lt; <sup>2</sup>mantas.juknys@vgtu.lt*

**Santrauka.** Šiame darbe skaitiškai modeliuojamas gelžbetoninių elementų tinkamumo ribinis būvis, apimantis pleišėjimo, deformacijų ir sukibimo modeliavimą. Siūlomas metodas gali būti taikomas bet kokių geometrinių matmenų elementams, esant įvairioms apkrovimo schemoms ir medžiagų mechaninėms savybėms. Jis gali būti taikomas tiek tempiamųjų, tiek lenkiamųjų armuotojo betono elementų analizei. Siūlomai modeliavimo metodikai patikrinti buvo sukurta skaitinė diskretaus pleišėjimo programa, leidžianti modeliuoti plyšių vystymąsi ir besikeičiantį konstrukcijos standumą. Gautų skaitinių ir eksperimentinių rezultatų palyginimas patvirtino siūlomos metodikos perspektyvumą.

**Reikšminiai žodžiai:** gelžbetonis, pleišėjimas, sukibimas, skaitinis modelis.

### Įvadas

Armuotasis betonas yra kompozitinė medžiaga, sudaryta iš dviejų skirtingas mechanines savybes turinčių komponentų: armatūros ir betono. Šių medžiagų sąveika, dažnai vadinama sukibimu, turi lemiamą įtaką konstrukcijų elgsenai, vertinant tiek saugos, tiek tinkamumo ribinius būvius (Gambarova 2012).

Tradiciškai gelžbetoninės konstrukcijos projektuojamos remiantis idealaus armatūros ir betono sukibimo prielaida – slinktis, susidaranti sąlyčio zonoje, yra nevertinama. Šią prielaidą galima taikyti atliekant konstrukcijų saugos ribinio būvio skaičiavimus, tačiau, vertinant tinkamumo ribinius būvius (plyšio plotį ir deformacijas), toks supaprastinimas dažnai yra nepriimtinas (Oehlers *et al.* 2012). Nevertinant susidarančios slinktys, gaunamos sudėtingos ir dažnai prieštaringos empirinės plyšio pločio ir deformacijų skaičiavimo formulės. Šiuo metu plačiai taikomuose empiriniuose projektavimo normų metoduose plyšio plotis ir konstrukcijos deformacijos apskaičiuojamos taikant skirtingas metodikas, dažnai gaunamos paklaidos, artimos šimtui procentų (Gribniak *et al.* 2012).

Projektavimo normų alternatyva – skaitiniai konstrukcijų analizės algoritmai. Taikant vieną iš skaitinės konstrukcijų analizės metodų – įtempių perdavimo algoritmą – įmanoma realistiškai sumodeliuoti armatūros slinktį betono atžvilgiu, plyšių plitimą, konstrukcijos deformacijas ir kintantį standumą pleišėjimo proceso metu. Įtempių perdavimo algoritmai pagrįsti mechanine armatūros ir betono

sąveika lokaliu lygmeniu ir gali būti taikomi įvairių armatūros rūšių (plieninės, kompozitinės) ir betono (plieno plaušu armuoto betono, stipriojo betono) konstrukcijų analizei (Balazs 1993). Pagrindinis įtempių perdavimo algoritmų trūkumas yra jautrumas pasirinktam armatūros ir betono sąveikos dėsniai. Skirtingai nuo armatūrai ir betonui taikomų medžiagų modelių, universalus šių medžiagų sąveikos dėsnio nėra pasiūlyta. Skaičiavimams dažniausiai taikomi supaprastinti sąveikos dėsniai, tinkami tik atskirais atvejais. Esamus armatūros ir betono sąveikos modelius taikant pleišėjimo ir deformavimosi uždaviniams spęsti dažnai gaunami prieštaringi rezultatai (Jakubovskis *et al.* 2014)

Šiame darbe atliekama gelžbetoninių elementų tinkamumo ribinio būvio analizė, apimanti pleišėjimo, deformacijų ir sukibimo modeliavimą. Sukurtas skaitinis algoritmas gali būti taikomas bet kokių geometrinių matmenų elementams, esant įvairioms apkrovimo schemoms bei medžiagų mechaninėms savybėms. Jis gali būti taikomas tiek tempiamųjų, tiek lenkiamųjų armuotojo betono elementų analizei. Siūlomai modeliavimo metodikai patikrinti buvo sukurta skaitinė diskretaus pleišėjimo programa, leidžianti modeliuoti plyšių vystymąsi ir besikeičiantį konstrukcijos standumą.

### Skaitinio modeliavimo metodas

Armuotojo betono pleišėjimo ir deformavimosi procesą fizikine prasme galima sumodeliuoti taikant įtempių perdavimo

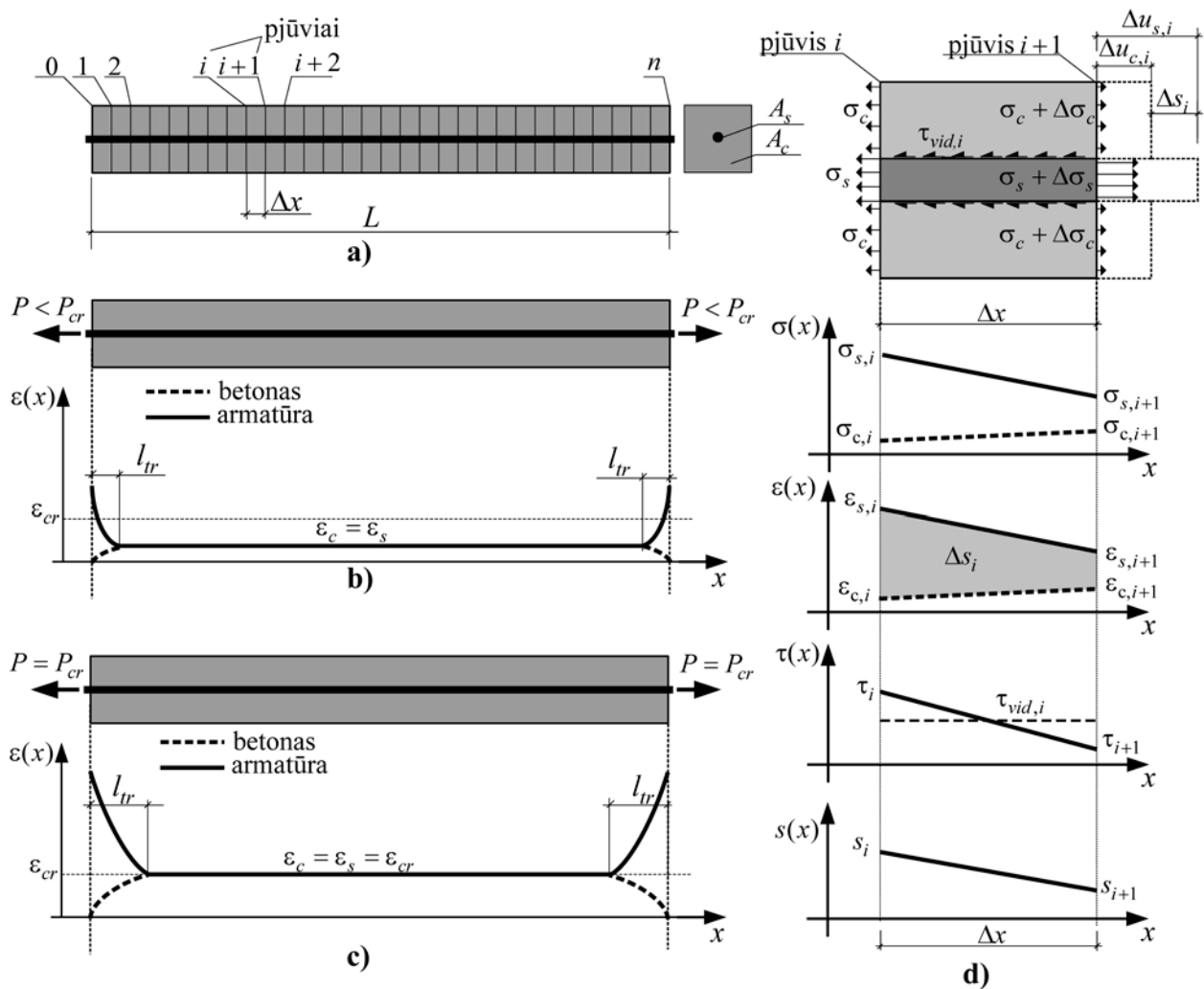
algoritmus. Šie algoritmai yra pagrįsti armatūros ir betono sąlyčio zonos idealizavimu ir diferencialinės sąveikos lygties sprendimu. Taikant įtempių perdavimo algoritmus, įmanoma sumodeliuoti plyšio atsiradimą, betono ir armatūros įtempių bei deformacijų pasiskirstymą per elemento ilgį, plyšių pločius ir bendras elemento deformacijas. Dėl pleišėjimo modeliavimo pobūdžio, kai vertinamas kiekvienas naujai atsirandantis plyšys, įtempių perdavimo algoritmai dažnai priskiriami diskrečiųjų plyšių grupei (Yankelevsky *et al.* 2008).

Taikydami pagrindines įtempių perdavimo algoritmų nuostatas, autoriai sukūrė skaitinę armuotojo betono elementų pleišėjimo ir deformacijų analizės programą. Kaip

algoritmo pagrindu remtasi Salem ir Maekawa (1999) paskelbtu darbu. Norint realistiškiau sumodeliuoti sudėtingą betono prigimtį, buvo papildomai įvertintos atsitiktinės medžiagų stiprio charakteristikos, sąlyčio zonos pažeidimas augant apkrovai ir sąlyčio zonų apibūdinančių parametru įtaka gaunamiems rezultatams.

Sukurtame įtempių perdavimo algoritme taikytos tokios prielaidos:

1. Armatūra ir betonas deformuojasi tiesiškai tampriai.
2. Plokščiųjų pjūvių hipotezė atskirai galioja armatūrai ir betonui.
3. Sukibimo įtempiai yra pasiskirstę tolygiai per visą strypo paviršiaus plotą.



1 pav. Tempiamųjų gelžbetoninių elementų analizė: a) elemento diskretizavimas į pjūvius; b) ir c) armatūros ir betono deformacijų pasiskirstymas prieš atsirandant plyšiams; d) įtempių, deformacijų ir slinkties kitimas tarp gretimų pjūvių

Fig. 1. Analysis of a tensile RC tie: a) discretization on an element into a number of sections; b) and c) reinforcement and concrete strain distribution before formation of cracks; d) distribution of stresses, strains and slip between two consecutive sections

## Įtempių perdavimo algoritmas

Nagrinėjama tempiama gelžbetoninė prizmė, kurios ilgis  $L$ , armatūros skerspjūvio plotas  $A_s$ , betono skerspjūvio plotas  $A_c$  (1 pav., a). Armatūros ir betono tamprumo moduliai atitinkamai  $E_s$  ir  $E_c$ . Tempimo apkrova pridedama prizmės galuose, prie armatūros. Remiantis pirmąja prielaida, armatūros ir betono įtempiai apskaičiuojami taikant tiesiškai tamprias medžiagų savybes. Armatūros ir betono sąveika aprašoma taikant tam tikrą sukibimo įtempių ir slinkties modelį  $\tau = \tau(s)$ . Skaičiavimo tikslas – sumodeliuoti elemento deformavimosi ir pleišėjimo procesą nuo pradinės apkrovos reikšmės iki irimo stadijos.

Nagrinėjamas elementas dalijamas į  $n$  skaičių pjūvių, atstumas tarp kurių  $\Delta x = L / (n + 1)$ . Praktiniams skaičiavimams siūloma imti  $\Delta x \approx 1$  cm ruožo ilgį.

Sakykime, elementą veikia išorinė apkrova  $P$ , nesukelianti plyšių atsivėrimo (1 pav., b). Skaičiuoti pradeda nuo apkrautojo galo, turint kraštines sąlygas: 1) betono įtempiai lygūs nuliui  $\sigma_c = 0$ ; 2) armatūros įtempiai yra maksimalūs  $\sigma_s = \sigma_{s,max} = P_i / A_s$ . Skaičiavimo algoritmui aprašyti imkime vieną ruožą  $\Delta x$ , esantį tarp pjūvių  $i$  ir  $i + 1$  (1 pav., d). Pjūvyje  $i$  žinomi betono ir armatūros įtempiai  $\sigma_{c,i}$  ir  $\sigma_{s,i}$  bei juos atitinkančios deformacijos  $\varepsilon_{c,i}$  ir  $\varepsilon_{s,i}$  (nustatyti iš ankstesnio ruožo). Toliau skaičiuojama tokiais žingsniais:

1. Spėjama slinkties reikšmė  $i$ -tajame pjūvyje  $s_i$ .
2. Taikant tam tikrą sukibimo įtempių ir slinkties funkciją, apskaičiuojami šią slinktį atitinkantys sukibimo įtempiai:  $\tau_i = \tau(s_i)$ .
3. Iš jėgų pusiausvyros sąlygos apskaičiuojami betono ir armatūros įtempiai pjūvyje  $i + 1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{c,i+1} &= \sigma_{c,i} + \frac{n \cdot \pi \cdot \emptyset \cdot \Delta x \cdot \tau_i}{A_c}, \\ \sigma_{s,i+1} &= \sigma_{s,i} - \frac{n \cdot \pi \cdot \emptyset \cdot \Delta x \cdot \tau_i}{A_s}, \end{aligned} \quad (1)$$

čia  $n$  – strypų skaičius;  $\emptyset$  – strypų skersmuo.

4. Remiantis tiesiškai tampria medžiagų elgsena, apskaičiuojamos įtempius atitinkančios deformacijos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,i+1} &= \frac{\sigma_{c,i+1}}{E_c}, \\ \varepsilon_{s,i+1} &= \frac{\sigma_{s,i+1}}{E_s}. \end{aligned} \quad (2)$$

5. Apskaičiuojamas slinkties pokytis, t. y. armatūros ir betono poslinkių skirtumas, nagrinėjamame ruože:

$$\Delta s_i = \Delta x \left[ \frac{(\varepsilon_{s,i} + \varepsilon_{s,i+1})}{2} - \frac{(\varepsilon_{c,i} + \varepsilon_{c,i+1})}{2} \right]. \quad (3)$$

6. Apskaičiuojama slinktis pjūvyje  $i + 1$ :

$$s_{i+1} = s_i - \Delta s_i. \quad (4)$$

7. Apskaičiuojami šią slinktį atitinkantys sukibimo įtempiai:  $\tau_{i+1} = \tau(s_{i+1})$ .
8. Apskaičiuojami vidutiniai nagrinėjamame ruože veikiantys sukibimo įtempiai:

$$\tau_{vid} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}. \quad (5)$$

9. Grįžtama į 3-įjį žingsnį, skaičiuoti naudojant sukibimo įtempius  $\tau_{vid}$ . Žingsniai 3–8 kartojami, kol norimu tikslumu nenustatomi vidutiniai sukibimo įtempiai  $\tau_{vid}$ .
10. Pereinama į kitą elementą, apribotą pjūviais  $i + 1$  ir  $i + 2$ . Armatūros ir betono įtempiai, nustatyti pirmojo ruožo pabaigoje, naudojami kaip pradinės sąlygos apskaičiuojant tolimesnį ruožą.
11. Skaičiavimai nutraukiami, kai tam tikrame pjūvyje  $m$ : 1) spėta slinkties reikšmė tampa lygi nuliui arba 2) armatūros ir betono deformacijos tampa lygios.
12. Apskaičiuojama faktinė slinktis nustatytame sąveikos ruožo ilgyje (nuo apkrautojo galo iki pjūvio  $m$ ), kaip visų slinkties pokyčių suma:

$$s = \sum_{i=1}^m \Delta s_i. \quad (6)$$

13. Jei 12 žingsniu apskaičiuota slinktis nesutampa su spėta pradine slinktimi ties apkrautojo galu, žingsniai 1–12 kartojami, 1 žingsnyje naudojant 12 žingsnyje apskaičiuotą slinkties reikšmę.
14. Skaičiavimai nutraukiami, kai randama pradinė slinkties reikšmė ir pjūvis  $m$ , kuriame tenkinamos abi 11 žingsnio sąlygos (slinktis yra lygi nuliui, o armatūros ir betono deformacijos yra lygios).

Taikant aprašytąjį algoritmą randamas įtempių perdavimo ilgis – atstumas, reikalingas armatūros ir betono deformacijų darnai pasiekti. Įtempių perdavimo ilgis 1 pav., b ir c, pažymėtas kaip  $l_{tr}$ . Nustačius armatūros ir betono deformacijų pasiskirstymą per visą elemento ilgį, vidutinės viso elemento deformacijos randamos suminį armatūros poslinkį dalijant iš elemento ilgio:

$$\varepsilon_{vid} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{s,i} \Delta x}{L}. \quad (7)$$

Palaiapsniui didinant apkrovą  $P_p$ , randama tokia jos reikšmė  $P_{cr}$ , kai betono deformacijos pasiekia pleišėjimo ribą  $\varepsilon_{cr}$ . Ši ribinė elemento būseną parodyta 1 pav., c. Pasiekus pleišėjimo apkrovą  $P_{cr}$ , ties elemento viduriu

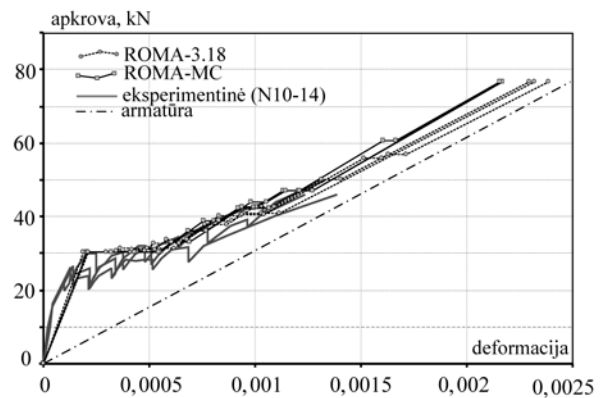
susidaro ilgas ruožas, kuriame armatūros ir betono deformacijos yra lygios ( $\epsilon_s = \epsilon_c = \epsilon_{cr}$ ). Bet kuriame pjūvyje, kuriame pasiekta armatūros ir betono deformacijų darna, gali susidaryti plyšys. Siekiant realistiškai sumodeliuoti pleišėjimo procesą, šiame darbe taikoma atsitiktinius skaičius generuojanti funkcija, atsitiktinai parenkanti plyšio atsiradimo vietą (Pugachev 2013). Skaičiuojama tol, kol, pakopomis didinant apkrovą, armatūros deformacijos plyšyje pasiekia takumo ribą.

### Modeliavimo rezultatai

Sukurta diskrečiųjų plyšių programa buvo pritaikyta literatūroje skelbiamų eksperimentinių tempiamųjų gelžbetoninių elementų pleišėjimo ir deformavimosi procesui modeliuoti. Vidutinių deformacijų modeliavimo rezultatams įvertinti buvo pasirinkti šeši tempiamieji gelžbetoniniai elementai iš Farra ir Jaccoud (1993) eksperimentinės programos. Ši eksperimentinė programa pasirinkta dėl bandinių apimties (ją sudarė 122 tempiamieji elementai) ir galimybės palyginti vienodų elementų deformavimosi pobūdį. 2 pav. pateiktos eksperimentinės ir sumodeliuotos N40–14 bandinių serijos apkrovos ir vidutinių deformacijų diagramos. Bandinio žymuo 40 nurodo naudotą betoną ( $E_c = 30,3$  GPa;  $f_{ct} = 2,81$  MPa;  $f_c = 39,9$  MPa), skaičius 14 žymi armatūros skersmenį ( $\varnothing = 14$  mm;  $E_s = 200$  GPa). Modeliavimo rezultatai pateikiami dviem atvejais: ROMA-MC žymi diskrečiųjų plyšių programos gautus rezultatus, taikant *Model Code* (2010) siūlomą armatūros ir betono sąveikos modelį. ROMA-3.18 žymi diskrečiųjų plyšių programos gautus rezultatus, taikant autorių pasiūlytą armatūros ir betono sąveikos dėsnį (Jakubovskis 2015). Dėl atsitiktinio plyšių atsivėrimo pobūdžio kiekvienu atveju buvo atliekama po tris skaičiavimus.

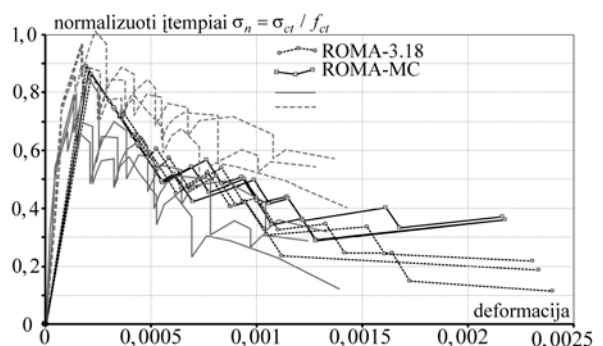
Nagrinęjant 2 pav. pateiktus rezultatus galima pastebėti, kad plyšių formavimosi etape tarp dviejų skaičiavimo atvejų gaunami minimalūs skirtumai, susiję su atsitiktinių plyšių atsivėrimu. Apkrovai pasiekus didesnes reikšmes (50–75 kN), sumodeliuota elementų elgsena išsiskyrė: skaičiuoti naudojant ROMA-MC elementų standumas praktiškai nesikeitė ir net šiek tiek didėjo. ROMA-3.18 atveju buvo sumodeliuotas laipsniškas standumo mažėjimas kylant apkrovos lygmeniui.

Standumo skirtumai tarp modeliavimo atvejų aiškiau matomi panagrinęjus betono vidutinių įtempimų ir vidutinių deformacijų diagramas, pateiktas 3 pav. Gautoje diagramoje punktyrine linija taip pat pateikiamos eksperimentinės betono vidutinių įtempimų ir vidutinių deformacijų diagramos, eliminavus susitraukimo efektą. Traukiantis betonui, net ir be išorinės apkrovos betone susidaro tempimo įtempiai,



2 pav. Eksperimentinės ir sumodeliuotos N40–14 bandinių serijos apkrovos ir vidutinės deformacijos diagramos

Fig. 2. Experimental and numerical load-average strain diagrams for N40–14 specimen series



3 pav. Sumodeliuotos ir eksperimentinės N40–14 bandinių serijos betono vidutinių įtempimų ir vidutinių deformacijų diagramos

Fig. 3. Numerical and experimental concrete average stress-average strain diagrams for N40–14 specimen series

kurių dydis daugiausia priklauso nuo elemento armavimo procento. Betono susitraukimo efektas turi didelę įtaką tiek elementų pleišėjimo pobūdžiui, tiek apskaičiuojant vidutines deformacijas (Gribniak *et al.* 2013).

Modeliuoti naudojant ROMA-MC, elementų plyšiai intensyviai vėrėsi iki irimo stadijos (pastebima iš šuoliškai kintančios betono vidutinių įtempimų ir vidutinių deformacijų diagramos). Tokia sumodeliuota elgsena prieštarauja stebimam eksperimentiniam tempiamųjų gelžbetoninių elementų pleišėjimo procesui, kai, pasiekus aukštesnes apkrovos stadijas, naujų plyšių atsivėrimas yra labai ribotas.

Stabilus pleišėjimo reiškinys buvo sumodeliuotas ROMA-3.18 atveju, kai naujų plyšių vėrimasis stabilizuodavosi pasiekus apie 0,0015 deformacijos reikšmę. Šiame etape didesnę reikšmę pradeda įgyti pažeidimo zona, bet ne augantys sukibimo įtempiai, todėl naujų plyšių elemente nesusidaro, o betono vidutinių įtempimų ir vidutinių deformacijų diagrama pradeda artėti prie horizontaliosios ašies. Be to, modeliuoti naudojant ROMA-3.18, betono vidutinių

įtempių ir vidutinių deformacijų diagramos pasižymėjo mažesne sklaida – tai gali būti paaiškinta pažeidimo zonos plitimu ir plyšių stabilizavimusi esant aukštomis apkrovos stadijoms.

### Išvados

1. Taikant sukurtą diskretaus pleišėjimo programą, galima realistiškai modeliuoti vidutines tempiamųjų gelžbetoninių elementų deformacijas ir betono vidutinių įtempių – vidutinių deformacijų diagramas.
2. Didžiausią įtaką gaunamiems modeliavimo rezultatams turi armatūros ir betono sąveikos modelio pasirinkimas.
3. Taikant *Model Codel* (2010) armatūros ir betono sąveikos dėsnį gaunamas eksperimentams prieštaraujantis elementų standumo didėjimas pleišėjant.

### Literatūra

- Balazs, G. L. 1993. Cracking analysis based on slip and bond stresses, *ACI Materials Journal* 90(4): 340–348.
- Jakubovskis, R.; Kaklauskas, G.; Gribniak, V.; Weber, A.; Juknys, M. 2014. Serviceability Analysis of Concrete Beams with Different Arrangements of GFRP Bars in the Tensile Zone, *Journal of Composites for Construction* 18(5). [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)CC.1943-5614.0000465](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000465)
- Jakubovskis, R. 2015. *Suderintas gelžbetoninių elementų pleišėjimo, deformacijų ir sukibimo modeliavimas*: daktaro disertacija. Vilnius: Technika. 158 p.
- Gambarova, P. G. 2012. Bond in reinforced concrete: where do we stand today?, in *Proc. 4<sup>th</sup> Int. Symposium “Bond in Concrete 2012: Bond, Anchorage, Detailing”*, June 2012, Brescia, Italy, 1: 1–13.
- Gribniak, V.; Kaklauskas, G.; Kacianauskas, R.; Kliukas, R. 2012. Improving efficiency of inverse constitutive analysis of reinforced concrete flexural members, *Scientific Research and Essays* 7(8): 923–938.
- Gribniak, V.; Torres, L.; Kaklauskas, G.; Daniūnas, A.; Kacianauskas, R.; Jakubovskis, R. 2013. Prediction of concrete shrinkage occurring prior to external loading and

effect on short-term constitutive modeling and design, *Advances in Structural Engineering* 16(6): 1061–1080. <http://dx.doi.org/10.1260/1369-4332.16.6.1061>

- Farra, B.; Jaccoud, J. P. 1993. *Influence of concrete and reinforcement on cracking of concrete structures*. Test Report of Short-Term Imposed Strains on Ties, IBAP, Pub. 140, Lausanne, Switzerland. 436 p
- Oehlers, D. J.; Visintin, P.; Haskett, M. 2012. Consequences and solutions to our abysmal neglect of bond-slip behaviour in reinforced concrete, in *Bond in Concrete 2012, Proceedings of the Fourth Bond in Concrete Conference: Bond, Anchorage, Detailing*, 17–20 June 2012, Brescia, Italy, 39–46.
- Salem, H.; Maekawa, K. 1999. Spatially averaged tensile mechanics for cracked concrete and reinforcement in highly inelastic range, *Concrete Library of JSCE* 34: 151–169.
- Pugachev, V. S. 2013. *Theory of random functions: and its application to control problems*. Elsevier.
- Yankelevsky, D. Z.; Jabareen, M.; Abutbul, A. D. 2008. One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks, *Engineering Structures* 30(1): 206–217. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.013>

### CRACKING AND DEFORMATION MODELLING OF TENSILE RC MEMBERS USING STRESS TRANSFER APPROACH

R. Jakubovskis, M. Juknys, P.-L. Ng

#### Abstract

The paper presents a modeling technique for bond, cracking and deformation analysis of RC members. The proposed modeling technique is not restricted by the geometrical dimensions of the analyzed member and may be applied for various loading conditions. Tensile as well as bending RC members may be analyzed using the proposed technique. Adequacy of the modeling strategy was evaluated by the developed numerical discrete crack algorithm, which allows modeling deformation and cracking behavior of tensile RC members. Comparison of experimental and numerical results proved the applicability of the proposed modeling strategy.

**Keywords:** reinforced concrete, cracking, bond, numerical modelling.